DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

... En supposant une solive pareille en tout à la précédente, mais ayant son fardeau au tiers de sa longueur (éloigné de 4 pieds d'un des bouts) : alors sa longueur de 12 pieds ne compte que comme une longueur de 8 pieds. D'après le calcul de la précédente, le produit de la superficie d'un des bouts, par la hauteur, est de 245, qui, au lieu de le diviser par 12, doit être divisé par 8 ; le quotient est de 30 5 / 8, qui, multiplié par 900, produit 27.562 livres 1 / 2, poids que peut porter la pièce de bois chargée au tiers de sa longueur.

Cependant, pour le service, il ne faudrait pas charger au poids que l'on calcule la force, parce que la pièce chargée pourrait se rompre et causer des accidents funestes ; on peut la charger à moitié du poids sans craindre aucun danger...

extrait de
VIGNOLE DES MENUISIERS
Ouvrage théorique et pratique
utile aux ouvriers, maîtres et entrepreneurs
par A.G. COULON (1835).

Voilà plus de 150 ans que ces lignes ont été écrites, depuis la connaissance a progressé et nous allons nous appliquer à démêler tout ces nœuds en restant pratique.

LOI DE HOOKE

Les déformations sont proportionnelles aux contraintes. Par exemple, si on suspend une masse de 1 kg au bout d'un ressort et qu'il s'allonge d'une distance d, on peut s'attendre à ce qu'il s'allonge de 2.d si on lui suspend une masse de 2 kg.

On conçoit immédiatement que le ressort ne va pas indéfiniment respecter cette loi si la charge devient trop importante pour lui.

La loi de HOOKE n'est valable que dans les domaines de l'élasticité de la matière. Si la limite élastique est dépassée, la matière sera irrémédiablement déformée ou tout simplement détruite suivant les caractéristiques du matériau.

En clair, supposons un élastique de section : 10 mm^2, et de longueur : 120 mm.

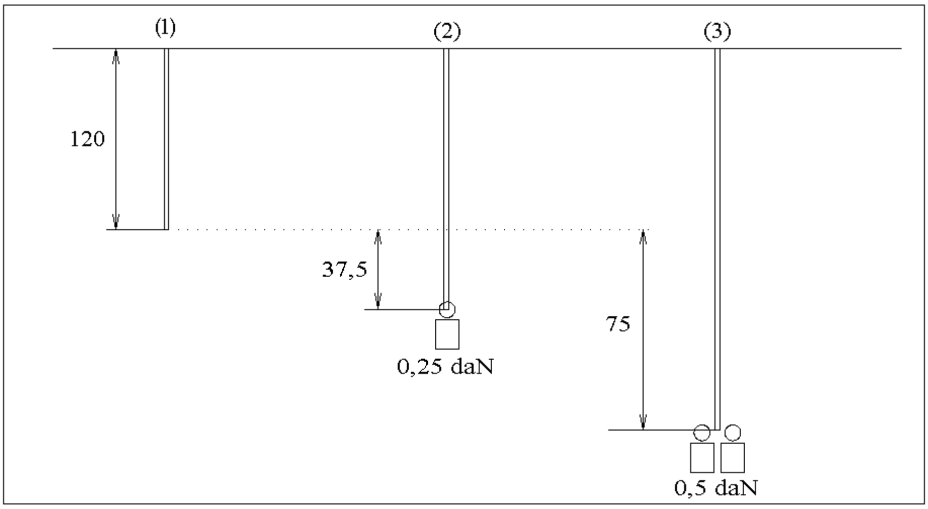

figure 1

1 - Elastique au repos (son propre poids est négligé) de 10 mm² de section.
2 - Charge 0,25 daN, l'élastique s'allonge de 37,5 mm, l'allongement sera donc de :
37,5 / 120 = 0,3125 (i).
3 - charge 0,5 daN, l'élastique s'allonge de 75 mm, l'allongement sera donc de :
75 / 120 = 0,625 (i).

Entre 2 et 3 la charge a doublé et l'allongement également.
On peut définir une caractéristique constante propre à chaque matériau permettant de prévoir les déformations. Dans notre exemple 2), chaque mm² d'élastique subit une contrainte de 0,25 / 10 mm² = 0,025 daN par mm² (t). De toute évidence, plus le matériau sera rigide moins grand sera l'allongement (ou la déformation). On appelle cette caractéristique de rigidité du matériau le module d'élasticité ou module de YOUNG que l'on nomme traditionnellement : E (exprimé en daN/mm²). Ce module est en relation directe avec l'allongement (i) et la contrainte (t) :

i = t / E

L'allongement est égal à la contrainte par mm² divisé par le module d'élasticité.

Dans notre exemple, nous ne connaissons pas ce module E pour le caoutchouc, mais nous allons pouvoir le calculer puisque E = t / i, relation déduite directement de i = t / E. Voyons ce qu'il en est de notre élastique.

2) i = 0,3125 et t = 0,025 daN / mm².
d'où E = 0,025 / 0,3125 = 0,08 daN / mm².

3) i = 0,625 et t = 0,05 daN / mm².
d'où E = 0,05 / 0,625 = 0,08 daN / mm².

Le module d'élasticité donne une idée de la rigidité du matériau, et non pas de sa « solidité ». A titre d'exemple le module E de l'acier est d'environ 20.000, le bois entre 500 et 1.500 suivant les essences, l'aluminium 7.000, la fibre de carbone 30.000.... On voit la différence avec l'élastique de caoutchouc.

Nous avons illustré les effets du module d'élasticité pour des contraintes de traction. Les modules en compression se démontrent de la même manière.
Lorsque le matériau n'est plus soumis aux contraintes il revient à sa forme initiale à moins que la limite élastique n'ait été dépassée.

Le Module d'élasticité est donc essentiel pour les calculs de résistance des matériaux. Il permet de prévoir les déformations d'une structure sollicitée.

Les modules E en traction et en compression ne sont pas forcément égaux pour le même matériau, ce qui ne simplifie pas les choses. S'ils sont égaux, on dit le matériau isotrope (cas des métaux en général).

Pour tous les calculs théoriques, on admet que les matériaux sont homogènes, en pratique ce n'est jamais le cas et on en tiendra compte dans les coefficients de sécurité.

Une autre caractéristique du matériau est la contrainte maximum admissible, c'est en général la valeur de la limite élastique exprimée en daN.mm^2 d'où l'on estimera la contrainte pratique par mm^2 à ne pas dépasser. (par exemple 10 daN/mm^2 pour l'acier suivant le type construction). Cette valeur sera le plus souvent déterminée en fonction de l'expérience acquise.

Pour avancer dans l'étude d'une structure, nous devons considérer divers aspects du problème :

- Les contraintes internes et faire en sorte qu'elles soient admissibles.
- Les déformations, qui elles aussi doivent être admissibles.
- Les contraintes locales, c'est-à-dire les endroits particuliers ou les efforts se concentrent du fait de la géométrie de l'ensemble.
- Les problèmes de fatigue résultant du genre de sollicitation (constante, variable, alternée...).

Commençons par les contraintes internes.

LES CONTRAINTES

TRACTION ET COMPRESSION

Les contraintes de traction se calculent simplement en faisant le quotient de la force appliquée par la surface de la section, comme nous l'avons vu avec l'élastique.

En compression, le problème est le même, tant que la pièce de structure sollicitée ne risque pas de *flamber*. Nous verrons plus loin ce phénomène.

FLEXION D'UNE POUTRE

Une poutre subissant des effets de flexion est soumise à la fois à des contraintes de traction, de compression et de cisaillement.

Les systèmes que nous étudions sont toujours dans un état d'équilibre, c'est-à-dire que les forces externes (forces appliquées) sont contrebalancées par les forces internes (forces de réaction). Le système se déforme exactement en vertu de la loi de Hooke.

Tous les matériaux sont plus ou moins élastiques. Un matériau infiniment rigide est une abstraction qui n'existe pas.

L'étude a pour but de connaître la valeur des contraintes intérieures et les déformations en fonction de l'échantillonnage choisi ou inversement suivant les cas.

FLEXION PURE

La flexion pure ne tient pas compte des contraintes et des déformations dues au cisaillement.

Supposons une poutre rectangulaire de longueur L, de hauteur h et de largeur b, montée comme ceci :

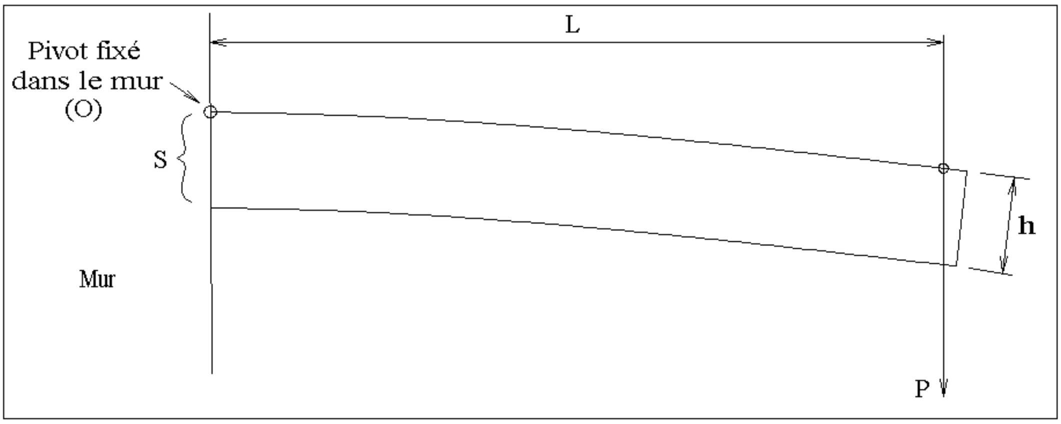

figure 2

La poutre est chargée d'un poids (force) P à la distance L de O. La poutre peut pivoter autour de O mais s'appuie sur le mur de toute la surface de sa section (S).

Toutes les "fibres" situées sous le point O sont donc soumises à des contraintes de compression et vont subir une déformation, un "tassement" dont l'amplitude sera directement proportionnelle à la contrainte (Loi de Hooke) et inversement proportionnelle au module E en compression, comme nous venons de le voir.

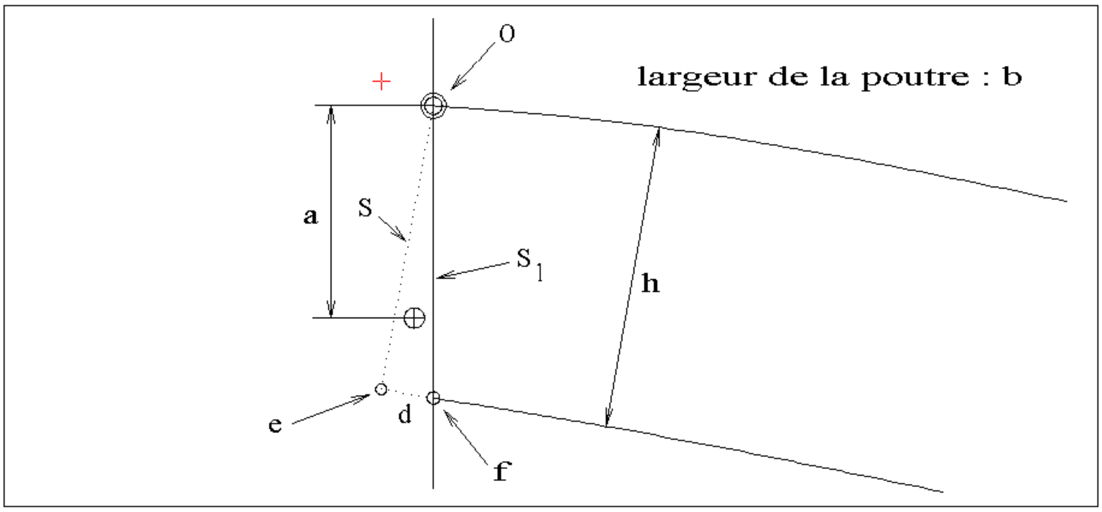

figure 3

La surface S (h.b) va donc se comprimer et venir en S1, le point (e) venant en (f) après s'être déplacé de la distance d.

Nous admettons que le mur ne se déforme pas et que la surface S_1 reste plane.

Par rapport au point O, le moment de flexion (M = P.L) que subit la poutre est équilibré par un moment égal et de sens contraire R.a.

R : Somme des forces réparties sur la surface S.

a : bras de levier allant de O jusqu'au centre de gravité de la somme des forces R. (Le barycentre).

Si on admet la loi de Hooke et le fait que S_1 reste plane après déformation, alors on doit aussi admettre que les forces se répartissent triangulairement avec un minimum au

point O et un maximum au point (f). Plus les déformations sont importantes et plus les contraintes sont grandes proportionnellement. Le centre de gravité de ces forces va évidemment dépendre de la forme de la section de la poutre.
Dans notre exemple, la largeur b est constante et le centre de gravité du volume O - e - f et de largeur b sera situé à 2.h / 3 de O (1 / 3 de la hauteur du triangle en partant de la base, définition même du centre de gravité d'un triangle).

Puisque les déplacements dus aux déformations sont proportionnels aux contraintes (loi de HOOKE), on peut donner une valeur au "volume en coin" O - e - f de largeur b égal à la somme des forces de réaction R.

Le moment de flexion M = P.L est équilibré par le moment interne R.a (équilibre des moments).
La force R est proportionnelle au volume du coin h.b.d / 2, en remplaçant d par la contrainte “Φ” correspondante à cet endroit, entre (e) et (f), d = Φ on aura :
R = h.b.Φ / 2 (Volume du "coin").
Sachant que a = 2.h / 3, le produit R.a (égal à M) peut s'écrire :

$M = (h.b.\Phi / 2).(2.h / 3) = h^2.b.\Phi / 3$

d'où l'on déduit la contrainte au point (f), à la distance h de O, c'est-à-dire à la fibre la plus éloignée de O :

$\Phi(h) = 3.M / h^2.b$ ou $M / (h^2.b / 3)$ [(1)].

Si on désire connaître la valeur de la contrainte (Φ) à la distance y de O, on la déduira par proportionnalité :

$\Phi(y) = \Phi(h).y / h$ suivant le théorème de THALES tout simplement.

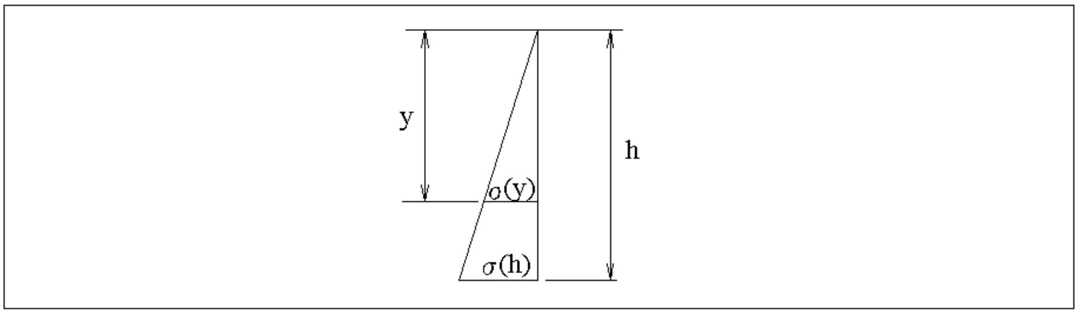

figure 4

Soit, pour un calcul plus direct :

$$\Phi(y) = \frac{(3.M / h^2.b).y}{h} = \frac{3.M.y}{h^3.b} \text{ ou } \frac{M.y}{(h^3.b / 3)}$$

$h^3.b / 3$ est la valeur du moment d'inertie du rectangle (h.b) par rapport à l'axe z (passant par O, perpendiculaire au papier) :

$$\mathbf{h^3.b / 3 = I_z.}$$

La fibre la plus sollicitée sera évidemment celle qui est la plus éloignée de O, à la distance traditionnellement notée “v” d'où :

$\Phi(max) = M.v / I$ ou $M / (I / v)$

"I / v" est appelé module de résistance de la section.
Ainsi, il suffit de connaître le I / v de la section pour avoir une caractéristique du "pouvoir de résistance" de la section. Ce module va donc dépendre directement de la géométrie de la section et comme on peut s'y attendre, la hauteur (h) est plus déterminante (h^2) que la largeur (b).

Cette valeur peut être calculée directement, en particulier pour le rectangle qui nous occupe :

$I = h^3.b / 3$ et $v = h$ donc $I / v = h^2.b / 3$.

Résultat que nous avions déjà obtenu [1].

La contrainte maximum par unité de surface sera égal à :
$M / (I / v)$. (v étant la distance de la fibre la plus éloignée de la fibre neutre). Pour connaître la contrainte à la distance y de la fibre neutre, il suffit d'appliquer la formule :

$\Phi(y) = M.y / I$.

Notre exemple est très simple, les surfaces des sections de poutre ne sont pas toujours rectangulaires et le point O n'existe pas dans la réalité.

Prenons un exemple plus réaliste, toujours avec une poutre rectangulaire :

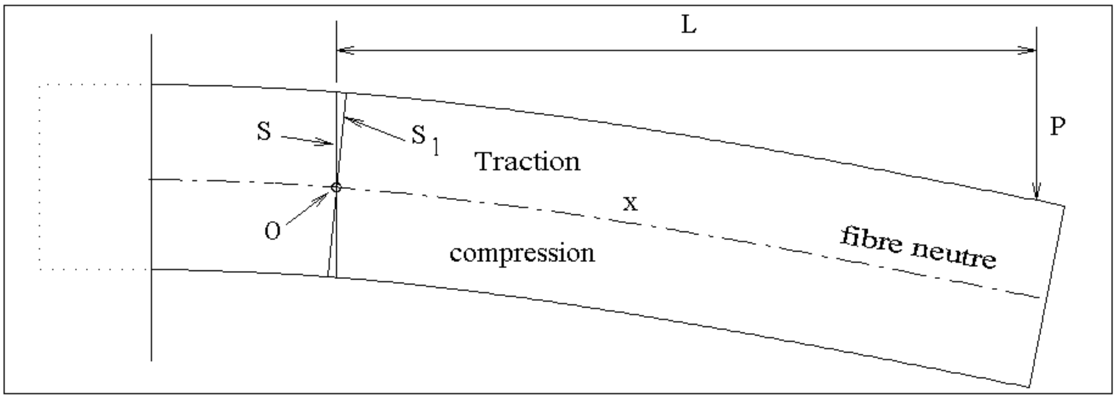

figure 5

Isolons une section S à la distance L du point d'application de la charge P. Cette section sera donc soumise au moment de flexion :

$M = P.L$ comme précédemment.

Nous gardons comme acquise l'hypothèse de NAVIER-BERNOUILLI qui précise que la surface S reste plane après déformation, lorsqu'elle vient en S1, c'est-à-dire qu'elle pivote autour de l'axe où les contraintes sont nulles.

Cette hypothèse n'est pas totalement exacte, en particulier en raison des déformations de cisaillement mais l'approximation reste toutefois suffisamment valable pour être praticable, comme nous le verrons plus loin.

Le moment M va se diviser en 2 parties égales (M / 2) et se répartir pour une partie en traction et une partie en compression autour de O. Ce couple de forces internes permet au système d'être en équilibre (dans la mesure où le matériau le supporte...).

"O" va donc se situer à un endroit où les contraintes sont nulles, sur la fibre neutre de la section (l'axe des x).
Si le matériau est isotrope et la section rectangulaire (ou symétrique par rapport à son centre de gravité) alors les inerties des parties de section soumises à traction et à compression sont nécessairement égales :
L'équilibre à l'intérieur de la poutre va s'effectuer comme ceci :
It = Ic. (I compression = I traction, pour un matériau isotrope).

I compression par rapport à O :
$(h / 2)^3.b / 3 = (h^3 / 8).b / 3 = h^3.b / 24$

$It + Ic = 2.h^3.b / 24 =$ $\mathbf{h^3.b / 12}$ = inertie totale de la section par rapport à O.

Calcul de la contrainte maximum :

Le moment de flexion se divise en 2 parties comme expliqué plus haut et la contrainte maximum de traction (ou de compression) sera :

$(M / 2) / ((h^3.b / 24) / (h / 2))$ (2)

Si on se réfère maintenant à la surface totale :
h / 2 représente v : distance de la fibre la plus éloignée de l'axe neutre.
$h^3.b / 24$ représente $I_{total} / 2$
M / 2 est le 1 / 2 moment de flexion.
(M / 2) / (I / 2) = M / I
La formule (2) est donc bien équivalente à M / (I / v) qui donne la valeur de la contrainte maximum sur la fibre la plus éloignée.

En résumé :
M : moment de flexion total.
I : inertie totale par rapport au centre de gravité. (fibre neutre).
v : distance de la fibre la plus éloignée de la fibre neutre.
Ce qui correspond exactement au résultat de l'exemple précédent lorsque la section de la poutre était entièrement soumise à compression.

Ce calcul n'est valable que si la section est symétrique par rapport au CG et que si le matériau est isotrope.

Avant d'avancer plus loin, nous devons nous arrêter sur le moment d'inertie des surfaces.

MOMENT D'INERTIE DE SURFACES QUELCONQUES

La théorie à partir d'une section rectangulaire est évidemment trop limitative, il nous faut l'étendre à toutes formes de sections.

Le moment d'inertie d'une surface est la somme des surfaces élémentaires infiniment petites (ds) qui compose cette surface multipliées par les carrés des distances (r) qui les séparent de l'axe de référence :

$I = \mu ds.r^2$

Cette définition est un peu abstraite dans l'absolu. Notre problème est de comprendre à quoi elle peut nous servir et à quoi elle correspond. Nous avons vu dans notre premier exemple, que la surface S était la base d'un volume "en coin", que ce volume était la représentation proportionnelle de la répartition des forces de réaction (R) à l'intérieur de la poutre et que si (a) est le bras de levier qui va de O au centre de gravité du volume "en coin", le produit R.a est le moment égal et de sens contraire au moment de flexion (P.L dans notre exemple).

Par analogie, le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe est le moment statique du volume illustré ci-après par rapport au même axe. Le moment statique d'un volume par rapport à un axe étant le produit du volume par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré (x). C'est ce produit qui nous intéresse au premier chef car au facteur de proportionnalité près, il sera égal au moment de flexion.

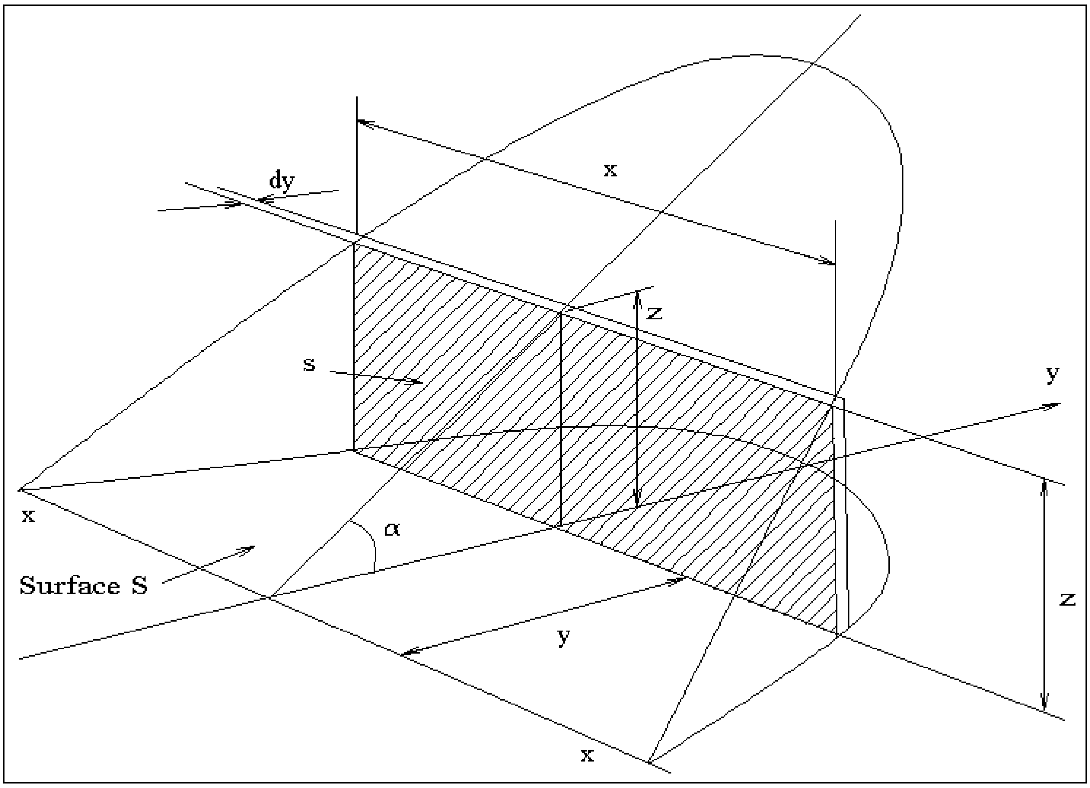

figure 6

Pour simplifier, prenons $\forall = 45°$ ce qui donne $\tan(\forall) = a = 1$, soit pour chaque valeur de y, $z = a.y$ donc $z = y$.
Moment statique de la surface s par rapport à l'axe : $s.y$
comme $s = z.x$ et $y = z$ donc $s = y.x$
et le moment statique de $s = y.y.x = y^2.x$
L'intégration pour tout le volume (de 0 à v) donnera le moment statique du volume ou le moment d'inertie de la surface S par rapport à l'axe :

$I_{axe} = \mu y^2.x.dy$

x est fonction de y. Si x est constant (S rectangle) et égal à b, on a :
$I = \mu b.y^2.dy = b.y^3 / 3$

et $I = b.v^3 / 3$ pour toute la surface si v est égal à la dimension maximum de y.

L'inertie de la surface S est égale au moment statique du volume "en coin" dont la base est la surface S, par rapport à l'axe.
Le volume de ce "coin" est égal à :

$V = \mu z.x.dy$, comme $z = y$; $V = \mu y.x.dy$

Si x est constant (S rectangle) et égal à b, on a $V = y^2.b / 2$

Ce volume correspond au moment statique (m) de la surface S par rapport à l'axe, et le CG de ce volume sera à la distance I / m de l'axe.
En résumé :

I = inertie de S (moment statique du "volume en coin")
m = moment de la surface S (volume du "volume en coin")
I / m = distance du centre de gravité du "volume en coin".

Nous avons pris $\forall = 45°$ par simplification. Si $\forall$ est différent de tan(45) alors :
$a = \tan(\forall)$ et $z = a.y$
L'équation du volume "en coin" devient :

$I_{axe} = \mu a.y.y.x.dy = a \ \mu y^2.x.dy$

Si x est constant et égal à b : $I_{axe} = a.y^3.b / 3$.

Si (a) est précisément le facteur qui rend l'inertie de la surface égale au moment de flexion M, soit $a.I = M$ on déduit que :
$a = M / I$.
D'autre part $z = a.y$ donc $z = M.y / I$.
z est la valeur de la contrainte (Φ) à la distance y de l'axe d'ou :
$\Phi = M / (I / y)$ et $\Phi(max) = M / (I / v)$ lorsque $y = v$.

Nous sommes revenus aux conclusions précédentes en partant du calcul des inerties de surfaces quelconques.

Pour illustrer ce passage, nous allons calculer le moment d'inertie d'un triangle par rapport à sa base suivant le schéma ci-dessous :

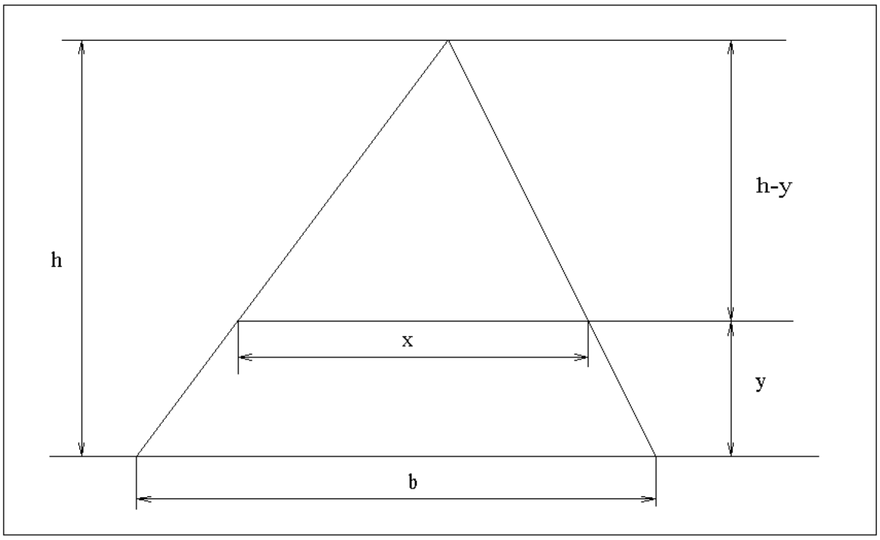

figure 7

La relation entre x et y est la suivante :
$h / (h - y) = b / x$ (THALES)
d'où
$h.x = b.(h - y)$ et $x = (b / h).(h - y)$
ou encore
$x = b - b.y / h$
Maintenant

$I_b = \mu y^2.x.dy$ (formule générale)

en remplaçant x par sa valeur :

$I_b = \mu y^2.(b - b.y / h).dy$

$I_b = \mu[y^2.b - b.y^3 / h].dy$

$$I_b = \frac{b.\mu y^2.dy - b}{h} \mu y^3.dy$$

$$I_b = \frac{b.y^3 / 3 - b.y^4}{4.h} = \frac{4.b.h.y^3 - 3.b.y^4}{12.h}$$

On donnant à y la valeur de h pour tout le triangle :

$$I_b = \frac{4.b.h^4 - 3.b.h^4}{12.h} = b.h^3 / 12$$

Voyons maintenant les méthodes pratiques pour calculer les moments d'inertie des surfaces par rapport à un axe.

Restons avec notre analogie des volumes "en coin" qui se révèle assez pratique pour illustrer les moments d'inertie des surfaces, même lorsque le moment d'inertie doit être calculés par rapport à un axe éloigné de la surface.

1 - L'axe de référence est choisi passant sur la surface :

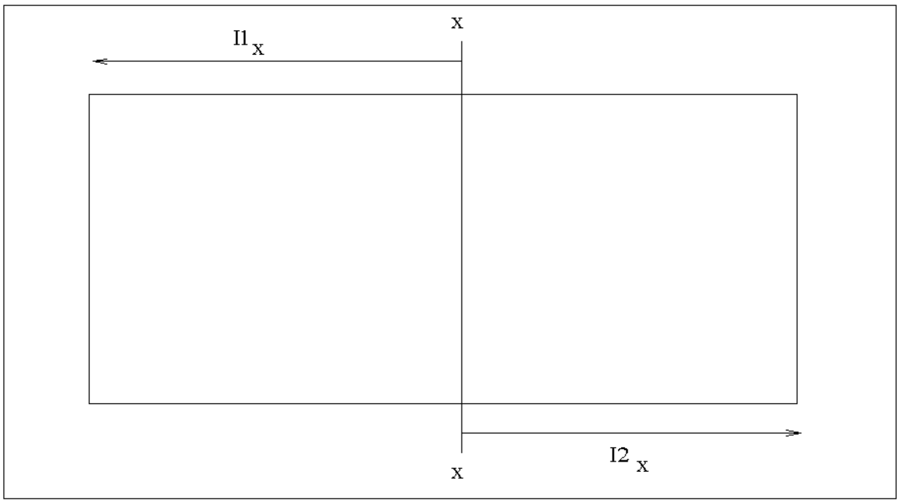

figure 8

Les inerties des surfaces réparties de part et d'autre de l'axe (x) doivent être ajoutées. Cette somme sera égale à l'inertie totale de la surface par rapport à cet axe (x) :

$$\mathbf{I_x = I1_x + I2_x}$$

Lorsque la surface est symétrique par rapport à cet axe (ce qui sera souvent le cas, on calculera directement l'inertie totale car dans ce cas $I1_x = I2_x$ ou $2.I1_x$

Par exemple, pour le rectangle de hauteur h et de largeur b :

$I1_x = (h / 2)^3.b / 3$ et $2.I1_x = h^3.b / 12$

2 - l'axe de référence est situé en dehors de la surface.

On peut calculer l'inertie de 2 manières.

a) en faisant la soustraction de $I_a - I_c$ comme sur la figure suivante :

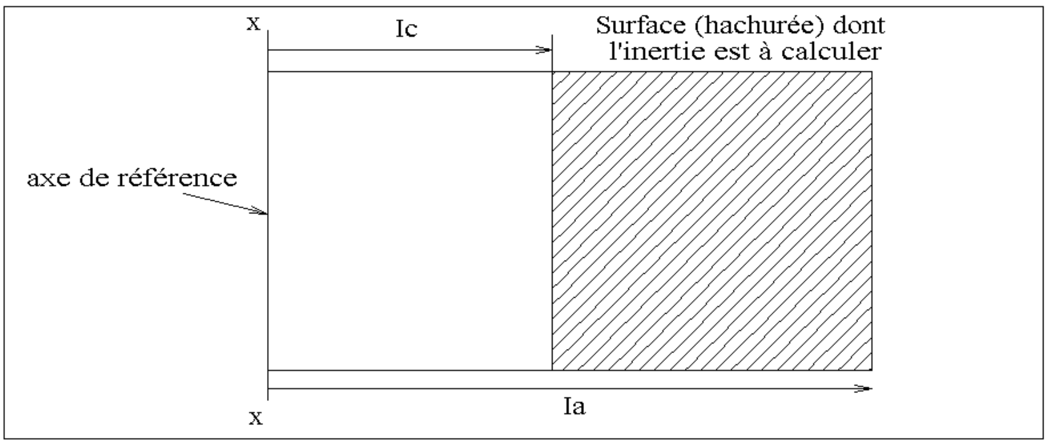

figure 9

b) par le théorème de STEINER : $\mathbf{I_x = I_{cg} + S.d^2}$

l'inertie de S par rapport à (x) est égale à l'inertie de S par rapport à l'axe cg (parallèle à x) passant par le centre de gravité de S augmenté du produit de la surface de S par la distance d au carré.
d = distance entre (x) et (cg).

Reprenons notre analogie des "volumes en coin" :

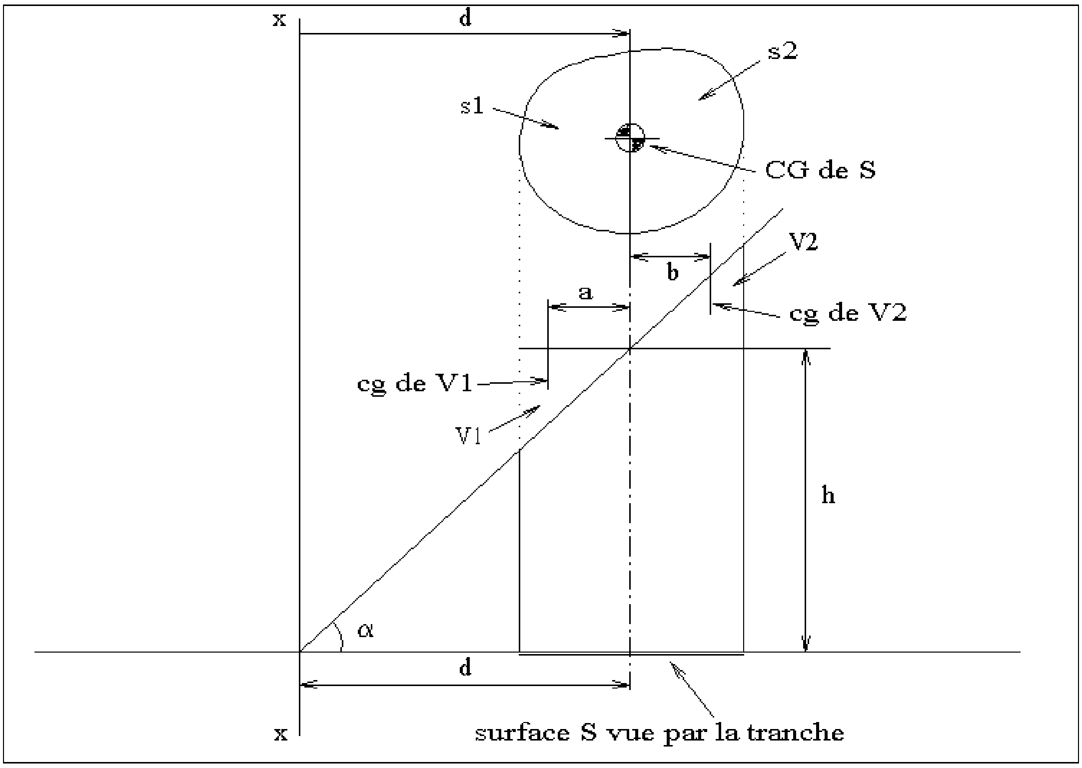

figure 10

Comme (a) = tan(45) = 1, h est égal à d et le volume de base S et de hauteur h est égal à S.h ou à S.d.
Moment de ce volume par rapport à (x) : $S.d.d = S.d^2$
Il faut maintenant ajouter le *moment* du volume V_2 et soustraire le *moment* du volume V_1 (toujours par rapport à x).

Considérons maintenant la surface S que l'on peut diviser en deux parties s_1 et s_2 de part et d'autre d'un axe passant par le CG de S.
Les moments statiques de s_1 et s_2 par rapport au cg sont obligatoirement égaux car ce fait a déterminé la position du centre de gravité de S.
Comme nous l'avons vu, le moment statique d'une surface est égal au volume du "volume en coin", on en déduit donc obligatoirement que $V_1 = V_2$, puisque les moments statiques de s_1 et s_2 sont égaux comme nous venons de le voir.

D'autre part l'inertie de $s_1 = V_1.a$, dans lequel a = distance du centre de gravité de V_1 à l'axe (cg) et l'inertie de $s_2 = V_2.b$.

l'inertie totale de S par rapport à (cg) sera donc égal à : $V_1.a + V_2.b$

Comme $V_1 = V_2$, I_{cg} de S $= V_1.(a + b)$

Pour finir la démonstration du théorème de STEINER, nous devons connaître les moments de V_1 et V_2 par rapport à (x) puisque nous devons les ajouter algébriquement à $S.d^2$.

$m_xV_1 = V_1.(d - a)$ et $m_xV_2 = V_2.(d + b)$

ou $m_xV_1 = V_1.(d + b)$ puisque $V_1 = V_2$

L'inertie de S par rapport à (x) sera donc :

$I_x = S.d^2 - V_1.(d - a) + V_1.(d + b)$ d'où :

$I_x = S.d^2 + V_1.(a + b)$

$V_1.(a + b) = I_{cg}$ de S comme nous l'avons vu plus haut.

Finalement $\mathbf{I_x = I_{cg} + S.d^2}$. Ce qu'il fallait démontrer.

------ o ---- o ------

Revenons un instant sur le moment d'inertie d'un triangle quelconque.

Nous avions trouvé que le moment d'inertie par rapport à la base était égale à $b.h^3 / 12$. En fonction du théorème de STEINER :
$I_x = I_{cg} + S.d^2$
soit de la même manière :
$I_{cg} = I_x - S.d^2$
ce qui va nous permettre de calculer le moment d'inertie du triangle par rapport à un axe parallèle à une base et passant par son centre de gravité :

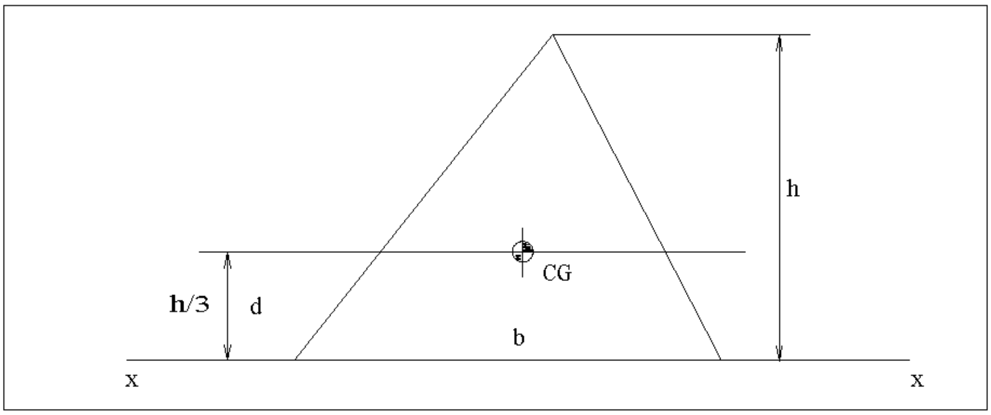

figure 11

$I_b = I_{cg} + S.d^2$
$d = h / 3$ et $d^2 = h^2 / 9$
$S = b.h / 2$
$S.d^2 = (b.h / 2).(h^2 / 9) = b.h^3 / 18$
on déduit I_{cg} :
$I_{cg} = I_b - S.d^2 = (b.h^3 / 12) - (b.h^3 / 18)$
$I_{cg} = (3.b.h^3 / 36) - (2.b.h^3 / 36) = b.h^3 / 36$

Pour finir, calculons rapidement le moment d'inertie du triangle par rapport à son sommet :

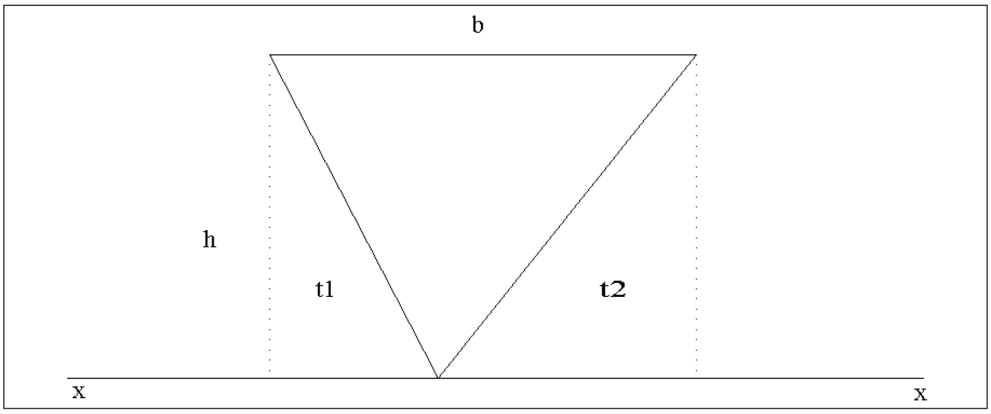

figure 12

Nous avons un rectangle (b.h) dont l'inertie est égale à : $b.h^3 / 3$ par rapport à l'axe xx.

De l'inertie de ce rectangle, il faut *soustraire* les inerties des triangles t1 et t2, ce qui revient à soustraire l'inertie du triangle de hauteur h et de base b ($b.h^3 / 12$, nous l'avons vu).
donc :
$I_x = b.h^3 / 3 - b.h^3 / 12$ ou $4.b.h^3 / 12 - b.h^3 / 12$
ce qui donne : $3.b.h^3 / 12 =$ $\mathbf{b.h^3 / 4}$

Moment d'inertie de surfaces compliquées

La surface dont le moment d'inertie à rechercher peut être une courbe dont la fonction est inconnue comme celle-ci par exemple :

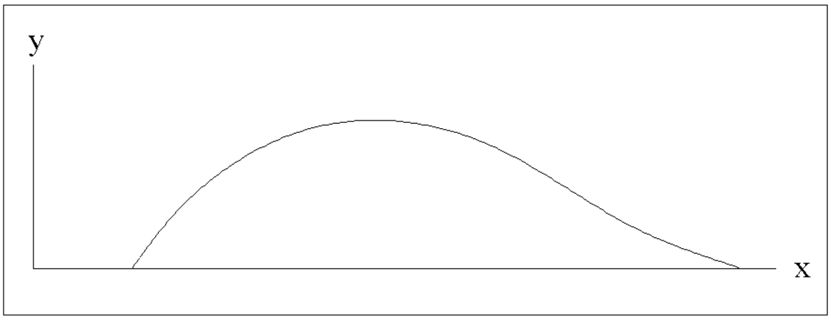

Figure 12-1

Une méthode simple consiste à effectuer une intégration "graphique". Prenons une "tranche" de la surface d'épaisseur (infiniment petite) dx :

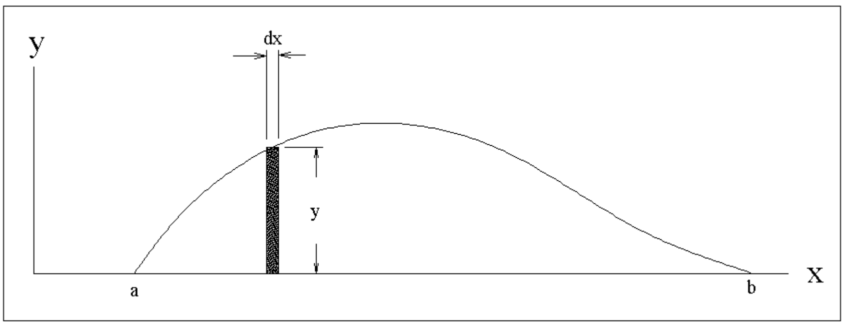

Figure 12-2

Le moment d'inertie du rectangle noir par rapport à l'axe XX est donc égal à :
$y^3.dx / 3$ comme nous l'avons vu plus haut pour un rectangle. L'inertie de la surface totale sera donc égale à la somme des inerties de tous les rectangles infiniment minces suivant la courbe entre a et b. Nous pouvons tracer une "courbe d'inertie"qui correspond à tous les y^3 / 3 :

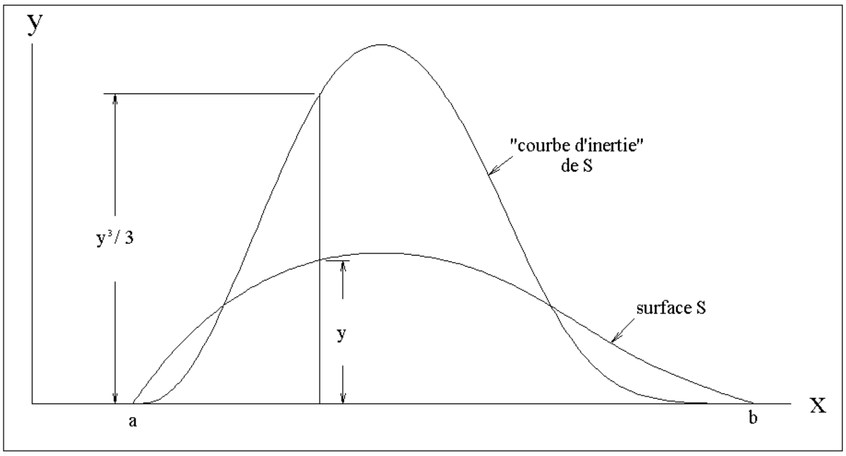

Figure 12-3

La surface mesurée de la "courbe d'inertie" correspond au moment d'inertie de la surface S par rapport à l'axe XX. C'est l'intégration graphique.

Exemple chiffré

Soit un profil de "quille" en acier d'une épaisseur de 29 cm, constitué de tôles de 6 mm soumis à un moment de flexion de 1.500.000 daN.cm (3750 daN à 400 cm)

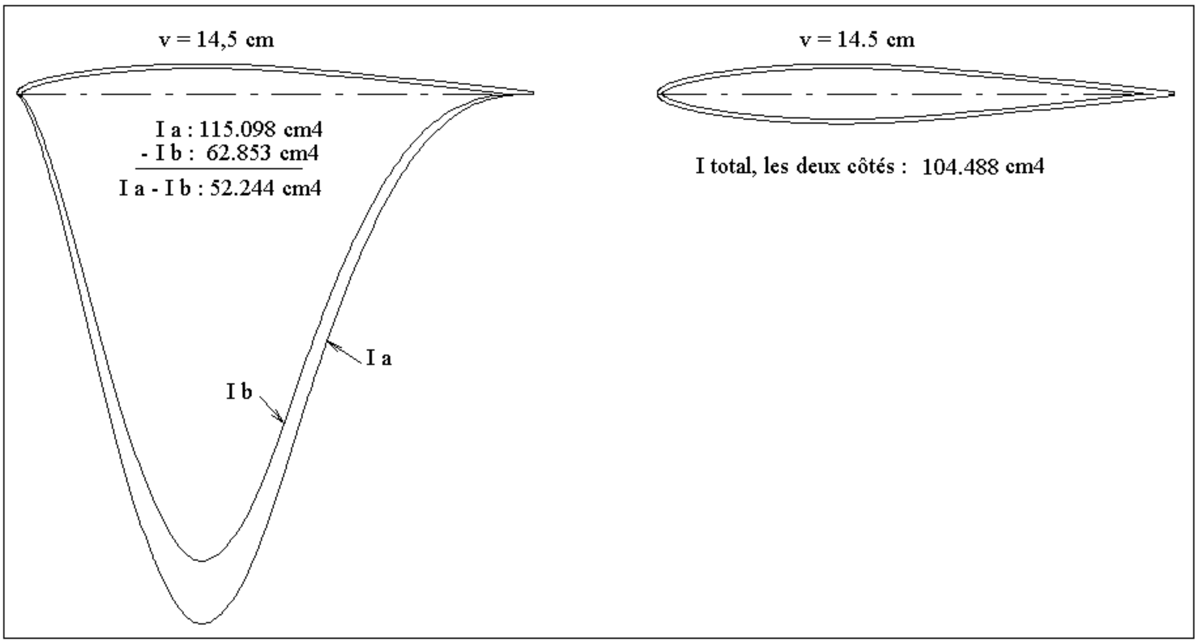

Figure 12-4

Les deux "courbes d'inertie" **Ia** et **Ib** correspondent à l'épaisseur de la tôle. On doit donc soustraire **Ib** de **Ia** pour obtenir l'inertie de la tôle par rapport à XX. Le double de cette valeur donne finalement l'inertie totale des deux côtés. La “fibre” (v) la plus éloignée de la fibre neutre, à 14,5 cm sera la plus sollicitée :

$\Phi(v) = M.v / I$ ou $M / (I / v)$

et $\Phi(v) = 1.500.000$ H 14,5 / 104.488 = 208.15 daN / cm²

ou 2,08 daN / mm² ce qui est insignifiant pour de l'acier dont la limite élastique se situe au-dessus de 20 daN / mm² suivant les nuances. (en supposant que l'intégrité géométrique soit préservée).

Nous avons vu que le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe était égal au moment statique du "volume en coin" par rapport au même axe. Le problème peut être de déterminer la position de cet axe qui doit se situer à l'endroit de la fibre neutre de la poutre soumise à des efforts de flexion.

Si le matériau est isotrope, l'inertie de la surface soumise à la traction doit être égale à l'inertie de la surface soumise à la compression (équilibre des forces internes).
Si la section est symétrique par rapport à son centre de gravité, la condition se vérifié automatiquement en positionnant la fibre neutre sur un axe passant sur le CG de la section.

Section asymétrique

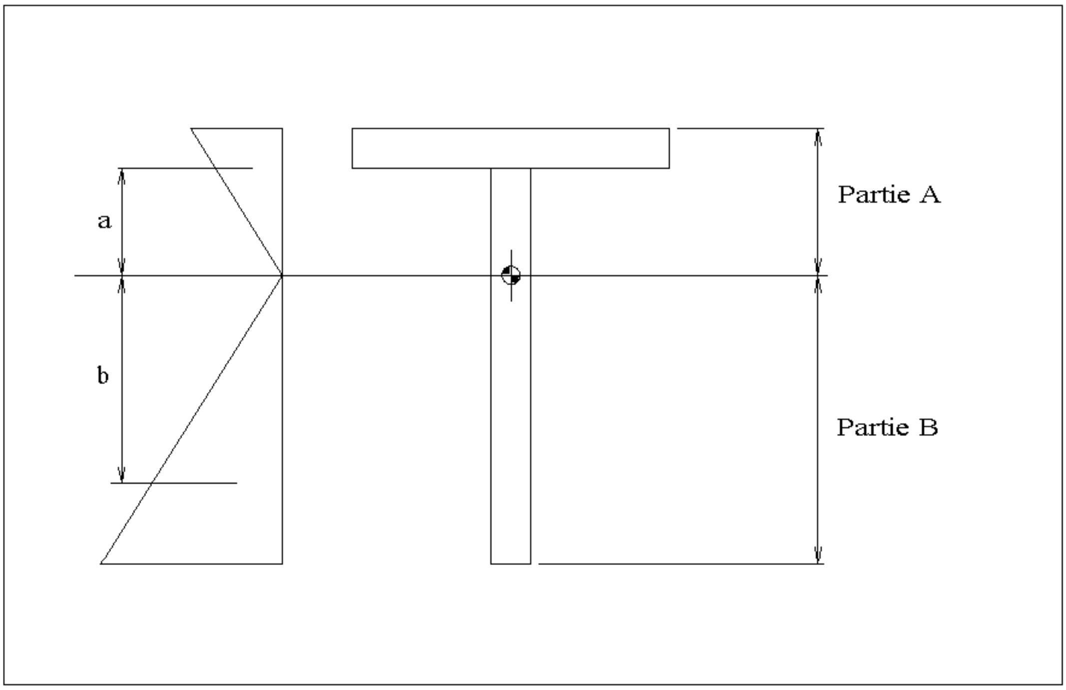

Figure 13

La position de la fibre neutre doit satisfaire la condition suivante : l'inertie de la partie A doit être égale à l'inertie de la partie B.
Essayons de prendre comme axe de référence celui qui passe par le CG de la section, dans ce cas le moment statique de A doit être égal au moment statique de B puisque cette égalité à déterminé la position du CG de la section. Ceci revient à dire que les volumes des "volumes en coin" sont égaux soit :

$$V_A = V_B$$

L'inertie de la partie A par rapport au CG sera donc :

$$V_A.a$$

et l'inertie de la partie B sera : $V_B.b$
Comme $V_A.a$ doit être égal à $V_B.b$ et que $V_A = V_B$,
il ressort obligatoirement que (a) doit être égal à (b), ce qui est impossible. Seule une section symétrique peut satisfaire ces conditions.

Les sections asymétriques n'ont pas obligatoirement leur fibre neutre passant sur le centre de gravité de la section.

Calcul de la position de la fibre neutre

Le calcul suivant ne concerne évidemment que les matériaux isotropes, nous verrons plus loin pour les autres matériaux tels que le bois ou les matériaux composites.

La figure suivante représente une section *vue par la tranche*. Le moment d'inertie de la partie A doit être égal au moment d'inertie de la partie B :

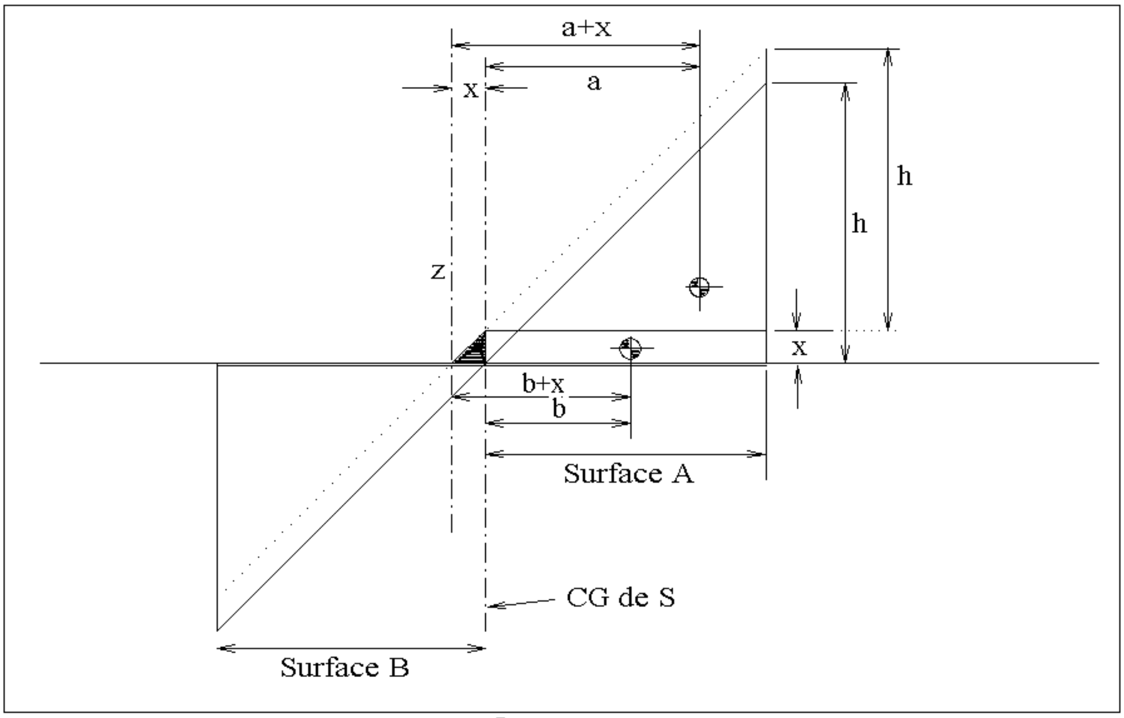

figure 14

Comme nous ne savons pas, a priori, où se trouve la fibre neutre, nous pouvons calculer les inerties des parties A et B par rapport au centre de gravité de la section et ensuite chercher à savoir de combien il faut décaler l'axe de référence (x) pour que ces inerties soient égales.

Considérons la partie A :

a = position du cg du "volume en coin" A (de hauteur h).

Nous l'avons vu plus haut, la valeur de (a) est donnée par le quotient :

$$a = I_A / m_A$$

où I_A est l'inertie de la partie A par rapport au CG de S
et m_A est le moment de la surface A par rapport au CG de S.

b = position du cg de la surface A (S_A).

En décalant l'axe de référence de la valeur (x) :

1 - on décale le "volume en coin" A vers le haut de la valeur (x)

2 - on ajoute le moment du volume de surface de base S_A et de hauteur x, soit le moment de ce volume par rapport à la nouvelle référence (z) :

$S_A.x.(b + x)$ ou

$S_A.x.b + S_A.x^2$

dans laquelle $S_A.b = m_A$ (moment de S_A) et $S_A.x.b = m_A.x$

3 - on ajoute le moment du triangle noir, disons I_0.

L'inertie de A par rapport au CG est égal au volume du "volume en coin" (V_A) multiplié par la distance de son centre de gravité (a).
Le moment de ce même volume par rapport à (z) sera égal à :

$$V_A.(a + x)$$

comme $a = I_A / m_A$ donc :

$$a + x = (I_A / m_A) + x$$

d'autre part : $V_A = m_A$ (le volume du "volume en coin" est égal au moment de sa surface de base) d'où :

$$V_A.(a + x) = m_A.((I_A / m_A) + x)$$

L'inertie totale de la partie A par rapport à (z) devient :

$$I_{Az} = m_A.((I_{Acg} / m_A) + x) + m_A.x + S_A.x^2 + I_0$$

qui donne :

$$I_{Az} = I_{Acg} + m_A.x + m_A.x + S_A.x^2 + I_0$$

finalement :

$$I_{Az} = I_{Acg} + 2.m_A.x + S_A.x^2 + I_0$$

On démontrera de la même façon pour la partie B :

$$I_{Bz} = I_{Bcg} - 2.m_B.x + S_B.x^2 - I_0$$

Sachant que I_{Az} doit être égal à I_{Bz} cela revient à dire que :

$I_{Az} - I_{Bz} = 0$

ou encore :

$x^2.(S_A - S_B) + x.(2.m_A + 2.m_B) + I_{acg} - I_{Bcg} + 2.I_0 = 0$

équation du 2ème degré de la forme $a.x^2 + b.x + c = 0$ avec :

$a = S_A - S_B$
$b = 2.m_A + 2.m_B$
$c = I_{Acg} - I_{Bcg} + 2.I_0$

On ne connait pas la valeur de I_0 qui dépend de la largeur (l) de la section à cet endroit et qui serait égal à : $l.x^3 / 3$.

Si on connait cette largeur (l), on peut l'introduire dans l'équation qui devient dès lors une équation du 3ème degré (x^3).
Restons pratiques, la valeur de I_0 proche de l'axe neutre est très petite et on peut sans remord la compter pour nulle ou refaire tout le calcul avec la nouvelle position de l'axe de référence décalée de (x). Un programme d'ordinateur fait ça très rapidement et trouve la solution exacte en deux ou trois passages.
Si la section est composée de deux surfaces séparées et que la fibre neutre ne coupe pas une des deux surfaces, alors I_0 est vraiment nulle et la solution est immédiate.

Pour résoudre l'équation, on fera :

$$x = (- b + / - \sqrt{b^2 - 4.a.c}) \; / \; 2.a$$

2 racines possibles, on prendra la plus petite en valeur absolue.

si $a = 0$, alors $x = - c / b$
si $c = 0$, alors $I_{Acg} - I_{Bcg} = 0$ et l'axe de référence est bon, $x = 0$.
b ne peut être nul ($2.m_A + 2.m_B$).

------ o --- o ------

En pratique, et traditionnellement, on utilise le centre de gravité des sections même lorsqu'elles sont asymétriques, acceptant, de fait, l'imprécision.

Transposons cela dans un exemple chiffré. Prenons une section asymétrique classique telle que celle-ci :

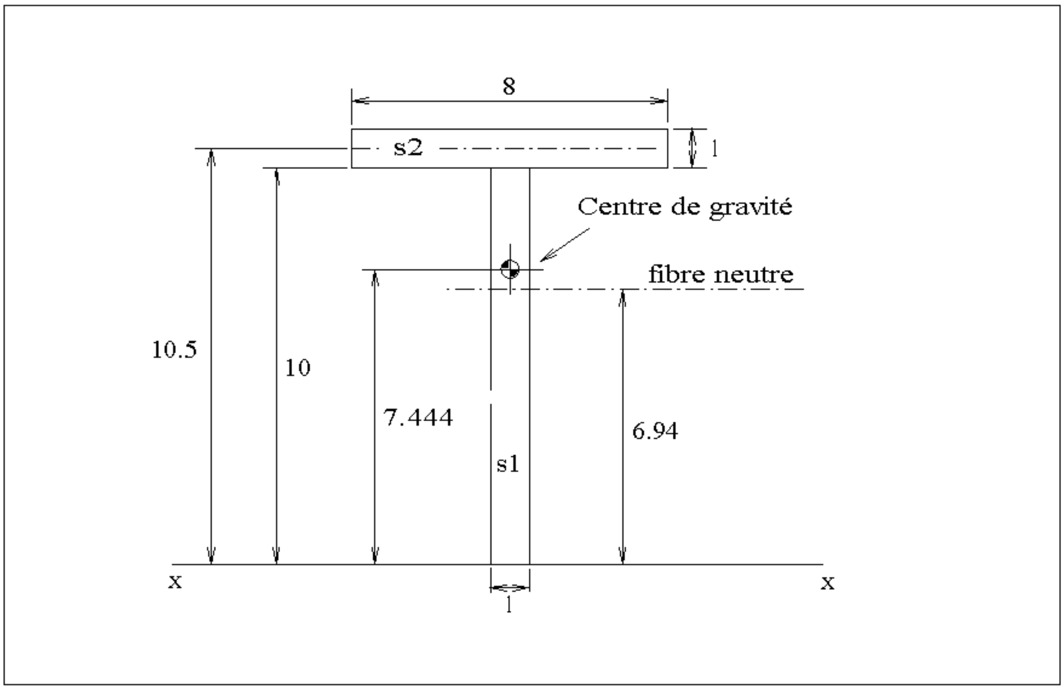

Figure 15

Pour plus de facilité, nous prenons le centimètre comme unité de mesure.

1 - calcul du centre de gravité de la section.
On prend un axe de référence, par exemple l'axe xx.
s1 = 10 * 1 = 10
m1 = 10 * 5 = 50

s2 = 8 * 1 = 8
m2 = 8 * 10.5 = 84

Surface totale = 18 cm^2
Moment total = 134 cm^3
Centre de gravité (M / S) = 7.444 cm par rapport à xx.

Le moment d'inertie de la section par rapport au centre de gravité est le suivant :

a - partie haute :

$8 * 1^3 \ / \ 12 + 8 * (10.5 - 7.444)^2 = 75.38\ cm^4$ (théorème de STEINER)
$(10 - 7.444)^3 \times 1 \ / \ 3 = 5.57\ cm^4$

Total de la partie haute = 80.95 cm^4

b - partie basse :

$7.444^3 \times 1 \ / \ 3 = 137.5\ cm^4$

Inertie totale de la section : 218.45 cm^4.

Les inerties haute et basse ne sont pas égales comme on s'en doutait.
L'application des formules développées plus haut donne la fibre neutre à 6.94 cm de l'axe xx de référence avec une inertie totale de 223 cm^4.

Voyons quelles incidences ces imprécisions pourraient entraîner.

Supposons que la poutre soit soumise à un moment de flexion de 10.000 daN.cm, et calculons la contrainte maximum dans les deux cas de figure.

a - *Calcul à partir du centre de gravité de la section :*

$I = 218.45\ cm^4$ et $I / v = 218.45 / 7.444 = 29.346\ cm^3$.

$\Phi(v) = M / (I / v) = 340.76\ daN.cm^2$ ou $3.407\ daN.mm^2$.

b - *Calcul à partir de la fibre neutre réelle :*

$I = 223\ cm^4$ et $I / v = 223 / 6.94 = 32.132\ cm^3$.

$\Phi(v) = M / (I / v) = 311.21\ daN.cm^2$ ou $3.112\ daN.mm^2$.

La poutre est donc moins sollicitée dans la réalité que ce que donne le calcul à partir du centre de gravité, ce qui peut être considéré comme un coefficient de sécurité supplémentaire.
Toutefois, lorsque les sections sont fortement disymétriques et que le souci principal est d'économiser sur la matière (légèreté), il peut être intéressant d'effectuer cette vérification.
Toutes ces considérations s'appliquent aux matériaux isotropes, on conçoit que lorsque les modules d'élasticité sont différents dans une même poutre, les calculs doivent en tenir compte, et c'est ce que nous abordons maintenant.

MATERIAUX NON ISOTROPES

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des modules d'élasticité (module de YOUNG) pour la bonne raison que nous avons restreint notre réflexion aux matériaux isotropes, c'est-à-dire avec les modules égaux en traction et en compression .
De ce fait, un allongement de matière dans un sens ou dans l'autre correspondait à une contrainte précise en compression ou en traction. Les "volumes des forces" étaient donc équilibrés de part et d'autre de la fibre neutre.

Reprenons l'exemple chiffré précédent et considérons la partie B.

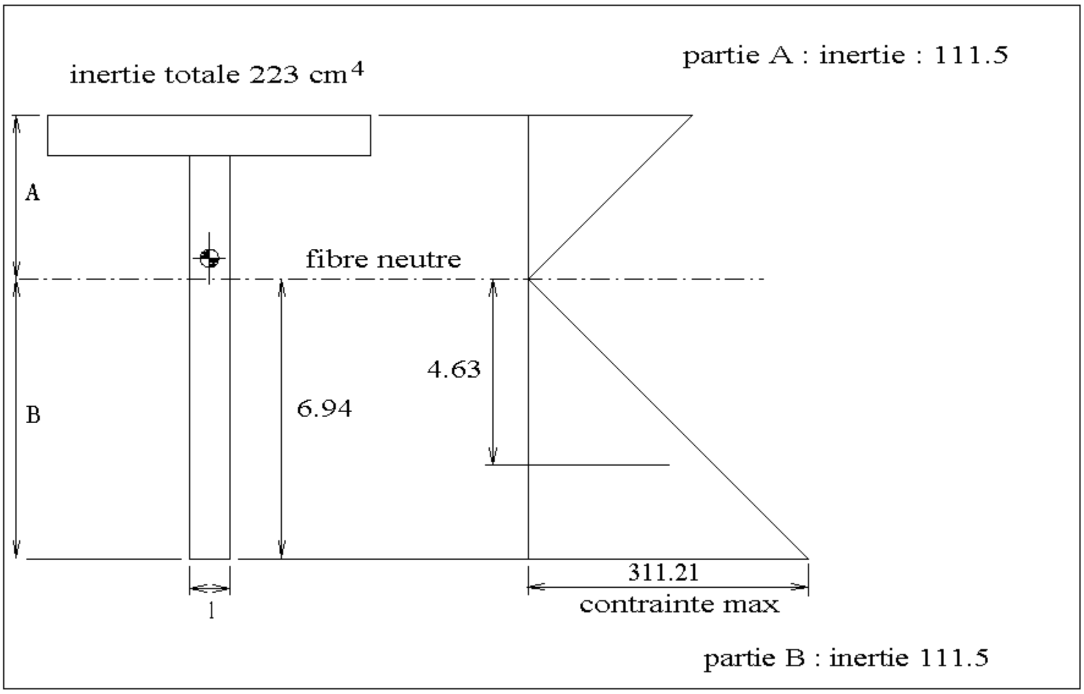

figure 16

Nous avions déduit que le moment du "volume en coin" était égal au moment de flexion pour peu que l'on prenne la dimension (h) égale à la contrainte à cet endroit, comme sur la figure (contrainte max : 311.21 daN.cm²).
Vérifions :

1 - Moment de flexion pour la partie B qui nous interesse soit M/2 donc 10000/2 = 5000 daN.cm.

2 - Volume du coin (Base H hauteur / 2) :

6,94 H 1 H **311.21** / 2 = 1079,9 cm³

3 - Moment du coin :

(6,94 H 2 / 3) H 1079,9 = 4996 soit 5000 daN.cm

Le résultat confirme exactement (à l'imprécision des décimales près) ce que nous attendions et le module d'élasticité n'entre pas en compte dans ces calculs. La vérification est forcément exacte car nous avions calculé les 311.21 daN.cm² à partir du moment de flexion de 5000 daN.cm.

Il faudra, en revanche, le prendre en compte les modules d'élasticité différents pour déterminer la position de la fibre neutre sachant que dans tous les cas *le moment des forces de traction doit être égal au moment des forces de compression à l'intérieur de la poutre.*

La loi de HOOKE nous précise que les déformations (les allongements) sont d'autant **moins importantes** que le matériau est rigide, c'est-à-dire que son module d'élasticité (E) est élevé. Autrement dit, pour une même déformation, la contrainte sera d'autant plus importante que le module d'élasticité est plus élevé, et ceci d'une manière exactement proportionnelle. On déduit de ces considérations la relation suivante :

$$I_t.E_t = I_c.E_c$$

(t = traction et c = compression).
Ce qui revient à donner un certain "pouvoir" aux inerties en fonction des modules d'élasticité.
Les moments des forces de réaction à l'intérieur de la poutre sont proportionnels aux inerties et aux modules d'élasticité.
Cette dernière relation va nous permettre de déterminer la position de la fibre neutre.

Cas d'une poutre rectangulaire

Prenons un matériau comme le bois, par exemple du pin d'Orégon qui a les caractéristiques suivantes :

E traction (E_t) = 1200 daN.mm²
E compression (E_c) = 980 daN.mm².

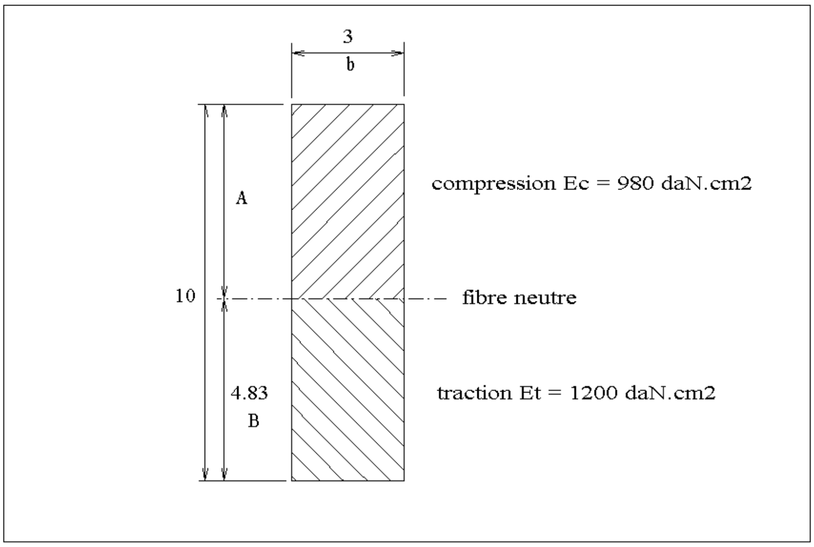

figure 17

La partie A est soumise à des contraintes de compression et la partie B à des contraintes de traction. On garde toujours pour acquise l'hypothèse de NAVIER-BERNOUILLI, à savoir que la section reste plane après déformation. Mais une même déformation est produite par une plus grande contrainte en traction qu'en compression dans le matériau qui nous occupe, soit :

$I_A.E_c = I_B.E_t$ d'où

$I_A / I_B = E_t / E_c$

Puisque la largeur (b) est constante dans cette section, le rapport
I_A / I_B est égal à A^3 / B^3 d'où

$E_t / E_c = A^3 / B^3$ ou

$(E_t / E_c)^{1/3} = A / B$

Comme A = H – B ; A / B = (H - B) / B = H/B - B/B = H/B - 1

$(E_t / E_c)^{1/3} = H/B - 1$ donc

$(E_t / E_c)^{1/3} + 1 = H/B$ et finalement

$B = H / ((E_t / E_c)^{1/3} + 1)$

Dans l'exemple que nous avons choisi cela donne :

$E_t / E_c = 1200 / 980 = 1.2245$

$B = 10 / (1.2245^{1/3} +1) =$ **4.8313 cm** (fibre neutre).

Effectuons la vérification :

$I_A = (10 - 4.8313)^3.b / 3 =$ **138.084** cm^4

$I_B = 4.8313^3.b / 3 =$ **112.77** cm^4

Inertie totale par rapport à la fibre neutre : 250.854 cm^4

$I_A.E_c = 135322$

$I_B.E_t = 135324$

L'égalité recherchée est respectée.

Avec ce résultat, voyons comment calculer les contraintes à l'intérieur de la poutre.
Supposons un moment de flexion de 10000 daN.cm
et prenons la moitié (une moitié en traction, une moitié en compression) soit 5000 daN.cm.
Pour que I_A soit égal = 5000, il faut que la contrainte maximum à la distance v ((v)) ait une valeur bien précise et nous connaissons la formule :

(v) = M/(I/v) ou (v) = M.v/I donc

a - *Contrainte de compression :*

$v = 10 - 4.8313 = 5.17$ cm; $I_c = 138.084$ cm^4

$\Phi_c = 5000$ H $5.17 / 138.084 =$ **187.2** daN.cm²

b - *Contrainte de traction :*

$v = 4.8313$; $I_t = 112.77$ cm^4

$\Phi_t = 5000 . 4.8313 / 112.77 =$ **214.2** daN.cm²

Nous pouvons aussi procéder autrement en tenant compte des inerties des section avec leur module d'élasticité.
La somme des $E_n.I_n$ qui compose chaque partie du matériau sera le EI total de la section et représente pleinement la "rigidité" de celle-ci.
Pour avoir le EI total de la section dans notre exemple, ajoutons les EI des deux parties A et B :

$EI_{total} = EI_A + EI_B$
$EI_{total} = 135323$ H $2 = 270646$
EI_{total} = **EI** dorénavant, par convention.

a - *Calcul de la contrainte de compression* :

v = 10 - 4.8313 = 5.17 cm

$\Phi_c = M.E_c.v / EI =$ **187.2** daN.cm²

b - *Calcul de la contrainte de traction :*

v= 4.8313 cm

$\Phi_t = M.E_t.v / EI =$ **214.2** daN.cm².

On peut évidemment calculer directement la valeur de M / EI, valeur que l'on multiplie à chaque fois par les E_n.v pour chaque matériaux considéré.

Les résultats sont évidemment les mêmes que la méthode précédente mais cette méthode est mieux adaptée pour les calculs sur les matériaux composites qui se composent de *n* matériaux différents.

Connaissant le moment d'inertie total de la section, nous pouvons connaître le module total qui va correspondre au *module d'élasticité en flexion* : E_f

$E_f = EI / I_{total} = 1079$ dans notre exemple.

Note : Nous ne nous sommes pas préoccupés des unités de mesure dans les modules d'élasticité, ici en daN.mm², *alors que nos calculs utilisent le cm. Ceci n'a pas d'importance car seul le rapport des modules nous intéresse.*

E_f = 1079 daN.mm² pour ce matériau. Ce module d'élasticité en flexion s'applique à une section dont on connait l'emplacement de la fibre neutre. Cet emplacement ne peut être connu qu'avec E_c et E_t...

Pour une section rectangulaire, en résumé :

1 - Calcul de la position de la fibre neutre :
$B = H / ((E_t / E_c)^{1/3} + 1)$

2 - calcul des inerties par rapport à la fibre neutre.

3 - Calcul de $EI = E_t + E_c$

4 - Calcul de M/EI

5 - Calcul des contraintes

$\Phi_t = E_t.v_t.M/EI$

$\Phi_c = E_c.v_c.M/EI$

La démarche est assez fastidieuse pour obtenir la valeur des contraintes maximum qui de toute façon seront l'objet d'un coefficient de sécurité. Dans la pratique, on s'en tient au calcul classique des matériaux isotropes et on ignore les modules d'élasticité en traction et en compression. Lorsque ceux-ci sont assez peu différents, comme pour le pin d'Orégon de notre exemple, l'erreur est assez minime :

$I = 10^3 . 3 / 12 = 250$ cm^4 (au lieu de 250.82 cm^4)

Les contraintes maximum en traction ou en compression deviennent :

$\Phi = 10000$ H $5 / 250 = 200$ daN.cm^2

(au lieu de 187 et 214, soit 6.5% et 7% d'erreur).
L'approximation est donc acceptable, mais il fallait savoir quelle marge d'erreur implique la méthode.

Certain matériaux composites (fibres exotiques) présentent une très grande différence entre leurs modules et une approche empirique est tout à fait à proscrire.

Egalement lorsque le matériau n'est pas isotrope et que la section n'est pas symétrique, à mon avis, il vaut mieux calculer les contraintes avec précision sous peine d'erreurs trop importantes.

Le calcul de la position de la fibre neutre est plus complexe qu'avec une poutre rectangulaire. Nous pouvons reprendre les formules que nous avions élaborées pour les sections asymétriques isotropes, mais cette fois-ci en appliquant à chaque élément les modules d'élasticité correspondants.

Nous avions une équation du second degré

$ax^2 + bx + c = 0$ avec (A = compression, B = traction)

$a = S_A - S_B$

$b = 2 (m_A + m_B)$

$c = I_{Acg} - I_{Bcg}$

qui nous permettait de trouver le décalage (x) de la fibre neutre par rapport au centre de gravité de la section. Nous allons appliquer la même formules de la façon suivante :

$a = S_A . E_c - S_B . E_t$

$b = 2 (m_A.E_c + m_B.E_t)$

$c = I_{Acg}.E_c - I_{Bcg}.E_t$

Lorsque les matériaux sont nombreux comme dans les matériaux composites, il suffit de faire la somme des éléments soumis à la compression multipliés par leurs modules d'élasticité et la somme des éléments soumis à la traction multipliés par leurs modules d'élasticité.

Résumé :

1 - Chercher le centre de gravité géométrique de la section.

2 - Appliquer la formule permettant de trouver la position de la fibre neutre et recommencer avec le décalage obtenu tant que la différence
$I_A.E_c$ - $I_B.E_t$
n'est pas égale à zéro.

3 - Calculer le EI de la section, soit la somme de tous les $I_c.E_c$ et tous les $I_t.E_t$.

4 - calculer le M / EI.

5 - Maintenant, pour obtenir la contrainte à une certaine distance d de la fibre neutre :

$\sigma_d = d.(M / EI).E_m$

E_m = le module d'élasticité du matériau considéré à la distance d de la fibre neutre et en traction ou en compression.

Reprenons notre exemple de la poutre en T en pin d'Orégon.

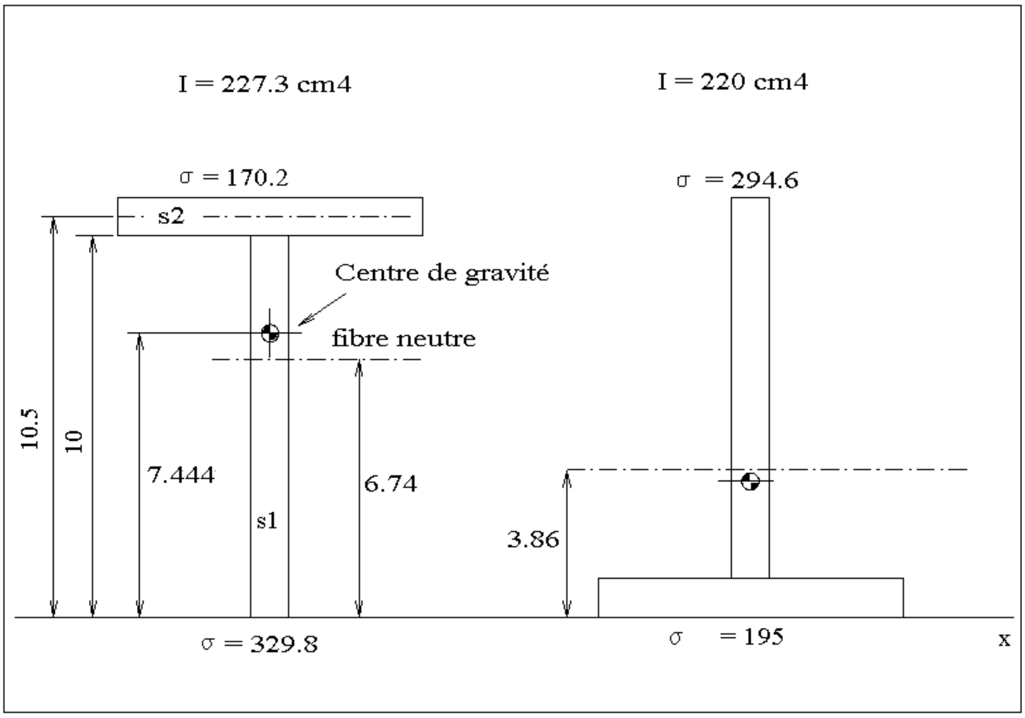

figure 18

Si on ne tient pas compte des différents modules dans cet exemple et avec un moment de flexion de 10000 daN.cm, on obtient :

$I = 218.45\ cm^4$

$\Phi(c) = 162.8\ daN.cm^2$
$\Phi(t) = 340.8\ daN.cm^2$

différents des chiffres indiqués sur la figure.